UDK 624.041.001.7

Primljeno 10. 7. 2000.

Metoda relaksacije u proračunu konstrukcije

Zlatko Maglajlić

Ključne riječi

proračun konstrukcija, sustav jednadžba, iterativna metoda, metoda relaksacije, linearnost, nelinearnost

Z. Maglajlić — *Prethodno priopćenje*

Metoda relaksacije u proračunu konstrukcija

Ukratko su prikazani iterativni postupci rješavanja sustava linearnih algebarskih jednadžbi i metode za rješavanje nelinearnih problema konstrukcija. Metoda relaksacije je primijenjena za rješavanje linearnih i prilagođena je za nelinearne probleme ovisno o razmatranome problemu. Metoda omogućava izbor načina rješavanja materijalne i geometrijske nelinearnosti odvojeno ili simultano. Metoda može naći primjenu u rješavanju nelinearnih problema i u drugim područjima tehnike.

Key words

structural analysis, equation system, iterative method, relaxation method, linearity, nonlinearity

Z. Maglajlić — *Preliminary note*

Relaxation method in structural design

Iterative procedures for solving linear algebraic equation systems, and the method for solving nonlinear structural problems, are briefly presented. The relaxation method used for solving linear problems has been adapted for solving nonlinear problems, depending on the type of problem. The method enables us to choose whether the material and geometrical nonlinearity will be performed separately or simultaneously. The method can also be used for solving nonlinear problems in other engineering applications.

Mots clés

calcul des construction, système d'équations, méthode itérative, méthode de la relaxation, linéarité, non-linéarité

Z. Maglajlić — *Note préliminarie*

Méthode de la relaxation dans le calcul des constructions

L'article présente brièvement les procédés itératifs de résolution des systèmes d'équations linéaires algébriques ainsi que les méthodes de résolution des problèmes non linéaires des constructions. La méthode de la relaxation a été mise en place pour la résolution des problèmes linéaires et elle a été adaptée à des problèmes non linéaires, en fonction de la nature du problème étudié. Cette méthode permet de choisir le mode de résolution de la non-linéarité matérielle et géométrique, séparément ou simultanément. La méthode peut être appliquée également à la résolution des problèmes non linéaires dans d'autres domaines techniques.

Schlüsselworte:

Berechnung von Konstruktionen, System von Gleichungen, iteratives Verfahren, Entspannungsverfahren, Linearität, Unlinearität

Z. Maglajlić — *Vorherige Mitteilung*

Entspannungsverfahren in der Berechnung von Konstruktionen

In Kürze werden iterative Verfahren für die Lösung eines Systems von linearen algebraischen Gleichungen und Verfahren Lösung die Lösung unlinearen Knstruktionsprobleme dargestellt. Das Entspannungsverfahren ist zur Lösung von linearen Problemen angewendet und für unlineare Probleme angepasst, abhängend vom betrachteten Problem. Das Verfahren ermöglicht die Auswahl der Lösungsweise für materielle und geomtrische Unlinearität, abgesondert oder simultan. Das Verfahren kann zur Lösung von unlinearen Problemen auch in anderen Gebieten der Technik angewendet werden.

Autor: Doc. dr. sc. **Zlatko Maglajlić**, dipl. ing. građ.,Građevinski fakultet u Sarajevu, Patriotske lige 30

1 Uvod o iteracijskim postupcima

Razmatramo sustav linearnih algebarskih jednadžbi oblika $Ax = b$ koji ima jedinstveno rješenje.

Iterativne metode su tako postavljene da niz približnih rješenja $x^k = [x_1^k, x_2^k, .. ,x_n^k]^T$ konvergira:

$$\lim_{k \to \infty} x^k = x \tag{1}$$

gdje je x traženo rješenje.

Iterativne metode mogu se predstaviti u sljedećem obliku:

$$x^k = Bx^{k\text{-}1} + \delta \qquad (k = 1,2, \ldots). \tag{2}$$

B je iterativna matrica koja je kod *Jakobijeve* iteracije $B^J = I - D^{-1}A$, koja je kod Gauss-Seidelove $B^{GS} = (I - L)^{-1}U$ i kod sukcesivne ubrzane relaksacijske metode to je $B_{\omega} = (I - \omega L)^{-1}(\omega U + (1\text{-}\omega)\, I)$ [1, 2].

Teorijski, primjenom iterativnih metoda rješenja se dobivaju nakon beskonačnog broja koraka. U praktičnom numeričkom postupku iteracija se prekida nakon zadovoljenja unaprijed postavljenog kriterija točnosti rješenja.

Matrična jednadžba (2) oblika $x = Bx + \delta$ jest ekvivalentna s matričnom jednadžbom $Ax = b$.

Vrijedi teorem da je nuždan i dovoljan uvjet za konvergenciju iterativnog procesa (2) ako su sve vlastite vrijednosti matrice B po modulu manje od jedinice $|\lambda_i (B)| < 1$. To znači da iterativni proces (2) konvergira ako i samo ako su sve nultočke polinoma

$$\det (B\text{-}\lambda I) = \begin{vmatrix} b_{11}\text{-}\lambda & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}\text{-}\lambda & \ldots & b_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & & b_{nn}\text{-}\lambda \end{vmatrix} \tag{3}$$

po modulu manje od jedinice.

Za ocjenu brzine konvergencije iterativnog procesa uzima se veličina spektralnog radijusa $S(B)$ koja daje mjeru asimptotske brzine konvergencije [1]

$$R(B) = -log\, S(B). \tag{4}$$

Ako je za dovoljno mali pozitivni broj ζ ispunjen uvjet $\|x^k\text{-}x\| < \zeta \|x^o\text{-}x\|$ gruba procjena potrebnog broja iteracija jest:

$$\frac{K\left(-\log\zeta\right)}{R(B)} = \frac{-\log\zeta}{-\log S(B)}. \tag{5}$$

Šira razmatranja o iterativnim metodama dana su u [1-4] i dr.

2 Najčešće relaksacijske metode

Za praktične probleme traže se metode koja dovode do rješenja zahtijevane točnosti sa što manjim brojem računskih operacija.

Najviše se primjenjuju ove metode: Jacobijeva (J), Gauss-Seidelova (GS), relaksacijska (R) te metoda dinamičke relaksacije (DR).

Ako se matrica A sustava linearnih algebarskih jednadžbi $Ax = b$ napiše u obliku $A = D - L - U$ gdje su: D dijagonalna, a L i U lijeva i desna trokutna matrica, sustav jednadžbi može se napisati u obliku

$$x = D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b. \tag{6}$$

Prema izrazu(6) *Jacobijeva* iteracija ima oblik

$$x^{m+1} = D^{-1}(L+U)x^m + D^{-1}b, \tag{7}$$

Gauss-Seidelova (GS) iteracijska formula

$$x^{m+1} = D^{-1}Lx^{m+1} + D^{-1}Ux^m + D^{-1}b \tag{8}$$

ili

$$x^{m+1} = (D\text{-}L)^{-1}Ux^m + (D\text{-}L)^{-1}b. \tag{9}$$

Ako x nije rješenje sustava jednadžbi $Ax = b$ i ukoliko se razlika b - Ax pomnoži sa D^{-1} dobiva se vektor ostatka ρ (residual vektor). Relaksacijska metoda, određuje komponente vektora ρ na osnovi poznatih početnih vrijednosti x, tako da je

$$x^{m+1} = x^m + \rho^{m+1}. \tag{10}$$

Ako se postavi uvjet da je tekući vektor ostatka u nekoj /m+1/-oj iteraciji jednak nuli dobiva se

$$\rho^{m+1} = D^{-1}b\text{-}x^{m+1} + D^{-1}Lx^{m+1} + D^{-1}Ux^m \ (=0), \tag{11}$$

pa je,

$$x^{m+1} = D^{-1}Lx^{m+1} + D^{-1}Ux^m + D^{-1}b. \tag{12}$$

Izraz (12) predstavlja Gauss-Seidelovu iteracijsku metodu, izraz (8), kada je $\rho = 0$, pa se time pokazuje da se ona može interpretirati kao relaksacijska metoda. Ako se vektor ostatka ρ u izrazu (10) pomnoži s realnim faktorom $\omega > 0$ dobiva se

$$x^{m+1} = x^m + \omega\rho^{m+1}, \tag{13}$$

što pretstavlja sukcesivnu ubrzanu relaksacionu metodu kojom se može ubrzati konvergencija. Ako je $\omega < 1$ proces se usporava, a za $\omega > 1$ ubrzava se. Faktor relaksacije ω unaprijed se bira ili određuje tijekom postupka.

Sukcesivna ubrzana relaksacijska metoda (*SOR – Successive Overrelaxation*) može se napisati u matričnom obliku

$$Dx^{m+1} = \omega(Lx^{m+1} + Ux^m + b) + (1\text{-}\omega)Dx^m. \tag{14}$$

Nakon transformacije dobiva se

$x^{m+1} = B_\omega x^m + k_\omega$ (15)

gdje je $B_\omega = (D+\omega L)^{-1}[(1-\omega)D-\omega U]$ i

$k_\omega = \omega(D+\omega L)^{-1}b$.

Matrica B_ω naziva se iterativna matrica *SOR* metode.

U Gauss-Seidelovoj metodi matrice *B* i *k* su oblika

$B^{GS} = (I-L)^{-1}U$ i $k^{GS} = (I-L)^{-1}D^{-1}b$, a u Jacobijevoj

$B^J = D^{-1}(L+U) = I-D^{-1}A$ i $k^J = D^{-1}b$ [1-3].

Vrijedi teorem: Iterativni postupak je konvergentan ako i samo ako su sve vlastite vrijednosti matrice B_ω iz izraza (15) po modulu manje od jedinice.

Kod iterativnog procesa *SOR* prema izrazu (14), vrijedi ocjena pogreške

$\|x^{k+1}-x\| \le \|A^{-1}(\gamma D+U)\|\cdot\|x^{k+1}-x^k\|$; $\gamma = 1-1/\omega$. (16)

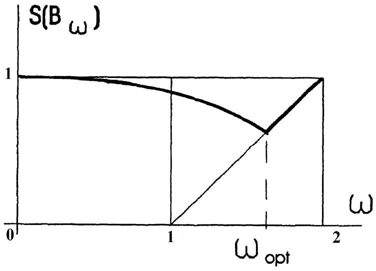
Relacija (16) je općenita ili treba zadovoljiti nužan uvjet da je matrica A regularna, s tim da je izraz $\|A^{-1}(\gamma D+U)\|$ dosta kompliciran za određivanje i može se pojednostaviti [1].

Za vrijednosti faktora relaksacije $0<\omega<2$ iterativni proces konvergira k točnom rješenju sustava jednadžbi $Ax = b$, u slučaju $\omega = 1$, *SOR* metoda se svodi na *GS* postupak.

Veoma je važan izbor faktora relaksacije ω, stoga je potrebno odrediti njegovu optimalnu vrijednost

$S(B_\omega(\omega_{opt})) = \min_\omega S(B_\omega)$ (17)

gdje je $S(B)$ spektralni radijus. Ako se nacrta graf funkcije $S(B_\omega)$-ω, može se odrediti optimalna vrijednost faktora relaksacije ω (slika 1.) [1, 2].



Slika 1. Dijagram $S(B_\omega)$ - ω

Optimalna vrijednost faktora ω_{opt} je

$\omega_{opt} = 2/[1+(1-M(B^J)^2)^{1/2}]$ (18)

gdje je $M(B^J)$ najveća svojstvena vrijednost matrice B^J. Funkcija $S(B_\omega)$ ima minimum [1-3] na segmentu (0,2). Spektralni radijus $S(B_{\omega opt})$ jest

$$S = \left(B_{\omega opt}\right) = \omega_{\omega opt} - 1 = \frac{1-\left(1-M\left(B^j\right)^2\right)^{1/2}}{1+\left(1-M\left(B^j\right)^2\right)^{1/2}} \quad (19)$$

S obzirom na to da se *J*, *GS* i *SOR* metodama vrijednosti nepoznanica u tijeku iterativnog postupka rješavaju eksplicitno na osnovi već postojećih, one se svrstavaju u metode *točku po točku.* Zbog načina dobivanja nepoznatih x^{m+1} iterativnim postupkom, *J* metoda se naziva metodom istovremenih pomaka, a *GS* i *SOR* metode metodama uzastopnih pomaka.

Southwell ističe da se problem koji može biti postavljen konačnim razlikama može riješiti metodom relaksacije. Osim toga pokazuje da je metoda u procesu razvoja i još ne može biti standardizirana te da metoda relaksacije otkriva sve pogreške, te ih može automatski ispraviti [4].

Dinamička relaksacija (DR) jest iterativna metoda pogodna za rješavanje problema elastičnosti koja je postavljena konačnim razlikama. Postupak vodi računa o kritičnim prigušenim oscilacijama i može se rabiti za probleme u jednoj, dvije ili tri dimenzije. U DR rabe se dinamičke jednadžbe (prigušene oscilacije).

U dinamičkim jednadžbama ravnoteže viskozno prigušenje određuje se tako da vibracije budu blizu kritičnih.

Ako se promatra štap opterećen normalnom silom (jednodimenzionalni problem), rješenje problema zahtijeva istovremeno zadovoljavanje jednadžbi

$\sigma = E \cdot du/dx$; $d\sigma/dx = \rho(du'/dt + Ku'/\Delta t)$ (20)

gdje je:

$u' = du/dt$
ρ - gustoća
K - viskozni faktor prigušenja
t - vrijeme

Primjer štapa s četiri čvora

Rubni uvjeti problema $u_1 = 0$ *i* $2p =$, $\sigma_4 + \sigma_5$ gdje je σ_5 napon nepostojeće točke 5. Izrazi (20) mogu se pisati u konačnim razlikama

$$\sigma_k = \frac{\left(u_{k+1}^r - u_k^r\right)E}{\Delta x}$$

$$\frac{\sigma_k^r - \sigma_{k-1}^r}{\Delta x} = \frac{\left(u'^{r+1}_k - u'^r_k\right)\rho}{\Delta t} + \frac{\left(u'^{r+1}_k + u'^r_k\right)K\rho}{2\Delta t} \quad (21)$$

pa je

$$u'^{r+1}_k = \frac{(1-K/2)u'^r_k + \left(\sigma_k^r - \sigma_{k-1}^r\right)K\rho}{1+K/2}. \quad (22)$$

Oznaka čvora štapa jest *k*, indeksi *r* i *r* + 1 odgovaraju uzastopnim iteracijama, a brzine *u'* vremenu $\Delta t/2$ prije i poslije određivanja napona i pomaka. Novi pomak u vremenu $(t + \Delta t)$ je $u_k^{r+1} = u_k^r + \Delta t \cdot u'^{r+1}_k$. Posljednji korak iteracije jest određivanje σ_k^{r+1} iz izraza (21), a sljedeći iterativni korak počinje s uvođenjem ovih napona u izraz (22).

Primjer je dan radi objašnjenja postupka po metodi dinamičke relaksacije [5].

J, GS i *SOR* metode vode računa o svojstvenim vrijednostima različitih matrica za određivanje brzine i optimalnih uvjeta konvergencije, a *DR* metoda se koristi frekvencijom vibracija elastičnog sustava.

J i *DR* su simultane (istodobne) iteracije, *J* iteracija konvergira mnogo sporije nego *DR*, pa je *DR* ubrzana istodobna iteracija. Veličinu prigušenja *K* u *DR* možemo smatrati optimalnim faktorom ubrzanja iterativnog procesa.

GS i *SOR* su uzastopne iteracije kod kojih se izračunane vrijednosti zavisnih nepoznanica u promatranoj točki odmah primjenjuje za izračunavanje u sljedećoj točki mreže. *SOR* metoda je ubrzana uzastopna iteracija i optimalna vrijednost faktora ω odgovara najvećoj brzini konvergencije[1, 2, 3]. Može se postaviti ovakva shema:

Istovremene (simultane)	Uzastopne (sukcesivne)	
osnovne	J-Jacobi	GS-Gauss-Seidel
ubrzane	DR-Dinamička relaksacija	SOR-Sukcesivna ubrzana relaksacija

Karakteristično za iterativne postupke J, GS, SOR jest da *poslije početnih* efekata sve konvergiraju konstantnom ali različitom brzinom u kojoj je odnos $\delta x^{k+1}/\delta x^{k}=m$ konstantan [1]. Ako u DR obilježimo osnovnu frekvenciju sustava točaka(konstrukcije) bez prigušenja sa $\omega_0/2\pi$ tada se najveća brzina konvergencije postiže kada je

$$\omega_0 = \alpha = \frac{K_{cr}}{2\Delta t} \Rightarrow m_{opt} = \frac{2-K_{cr}/2}{2+K_{cr}/2} \tag{23}$$

u slučaju *Jacobijeve* iteracije sa $\alpha\Delta t$ = 1, tada je $S(B^J) = (1-\omega_0^2\Delta t^2)^{1/2}$, uz obilježavanje $S = S(B^J)$ dobiva se

$$\omega_0 \Delta t = (1-S^2)^{1/2} \Rightarrow K_{cr} = 2(1-S^2)^{1/2} \tag{24}$$

pa je optimalna brzina konvergencije za slučaj *DR* kada je

$$m_{DR} = \frac{2-\left(1-S^2\right)^{1/2}}{2+\left(1-S^2\right)^{1/2}}. \tag{25}$$

U slučaju *SOR* metode vodeći računa o izrazu $K_{cr} = 2\,(1-S^2)^{1/2}$ dobiva se veza između optimalnog faktora ubrzanja ω_{SOR} i optimalnog faktora prigušenja K_{cr} u *DR*. Optimalni faktor ubrzanja za *SOR* metodu dobiva se vodeći računa o izrazim (18), (19), (24).

$$\omega_{SOR} = \frac{2}{1+K_{cr}/2} \Rightarrow m_{SOR} = \\ = \omega_{SOR} - 1 = \frac{1-\left(1-S^2\right)^{1/2}}{1+\left(1-S^2\right)^{1/2}} \tag{26}$$

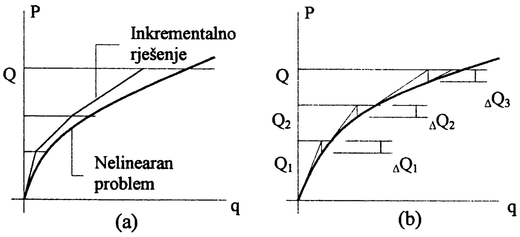
Može se vidjeti da *SOR* metoda ima veću brzinu konvergencije nego *DR* [5].

2 Nelinearne jednadžbe

Sustav nelinearnih jednadžbi rješava se inkrementalnim, iterativnim i mješovitim (inkrementalno-iterativnim) metodama. Razmatramo probleme koji su konvergentni.

Inkrementalne metode

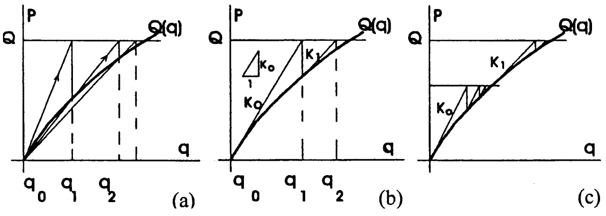
Osnovna ideja inkrementalnih metoda je da se ukupno opterećenje *Q* podijeli na niz manjih prirasta-inkremenata. U okviru svakog inkrementa linearizira se problem i kao granična vrijednost niza približnih rješenja dobiva se rješenje nelinearnog problema. *S* obzirom na linearizaciju problema za promatrani inkrement, pojavlja se odstupanje u odnosu prema točnom rješenju (slika 2.a). Pogreška se može smanjiti usvajanjem manjih inkremenata opterećenja. Ako se uvedu korekcije opterećenja ΔQ_i po inkrementima, dobivaju se rezultati proračuna s manjim odstupanjem (slika 2.b).



Slika 2. Inkrementalni postupak

Iterativne metode

Kod iterativnih postupaka rješavanje problema se provodi za ukupno opterećenje.



Slika 3. Direktna, Newton-Raphsonova i inkrementalno-iterativna metoda

Najjednostavnija je metoda direktne iteracije. Matrica krutosti $K(q)$ određena je početnim q_0 i tekućim rješenjima q_1, q_2,…, (slika 3.a). U drugom slučaju može se odrediti matrica krutosti $K(q)$ koja odgovara tangenti iterativnog rješenja. Ova je metoda poznata kao Newton-Raphsonova (NR) iterativna metoda (slika 3.b). Modificirani NR (MNR) postupak koristi se samo početnom krutosti K_0 u tijeku iterativnog postupka do rješenja q. Konvergencija MNR postupka je sporija od NR, ali nije potrebno određivati tangentnu matricu krutosti sustava K_0, K_1, K_2, …, što zahtijeva znatan broj numeričkih operacija [6 - 8]. Nelinearni problemi efikasno se rješavaju mješovitim metodama inkrementalno-iterativnim (slika 3.c).

3 Rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi metodom relaksacije

Neka je sustavom jednadžbi $Kq = Q$ predstavljen nelinearan problem, tako da su koeficijenti K_{ij} i Q_i proizvoljne funkcije nepoznatih i drugih veličina

$$K_{ij} = f_K(q_1, .\, q_n, t, \varphi, . .) \; ; Q_i = f_Q(q_1, .\, q_n, t, \varphi, . .). \quad (27)$$

Pri rješavanju tako postavljenog zadatka pogodno je koeficijente K_{ij} i Q_i u promatranoj iteraciji odrediti prema veličinama q_i, t, φ, … određenim u prethodnoj iteraciji i iz drugih uvjeta. Kako se sustav jednadžbi rješava metodom relaksacije može se pisati izraz u razvijenom obliku za nepoznanicu q_i

$$\rho_i^m = (K_{i1}^{m-1} q_1^m + . .) + K_{ii}^{m-1} q_i^{m-1} + \\ + (K_{i\,i+1}^{m-1} q_{i+1}^{m-1} + . .) - Q_i^{m-1}, \quad (28)$$

sada se dobiva nepoznanica q_i^m

$$q_i^m = q_i^{m-1} + \frac{q_i^m}{K_{ii}^{m-1}} = q_i^{m-1} + \Delta q_i^m \quad (29)$$

Tako se zbrojem dodataka Δq_i^m (pomaci-metoda deformacije) čvorova konstrukcije u tijeku iterativnog postupka dobiva rješenje problema

$$q_i = \sum_{M=1}^{T} \Delta q_i^m; \qquad m = 1,2, \ldots t \quad (30)$$

(t - konačan broj iteracija)

Kod ovog su postupka veličine dodataka nepoznanica Δq_i u tijeku iterativnog postupka male u odnosu prema konačnom rješenju q_i, pa je potrebno izvršiti ubrzanje konvergencije iterativnog postupka [1, 2, 3, 4, 11, 13].

Dodatne veličine (prirasti nepoznanica) Δq_i^m zavise od ostatka ρ_i^m nelinearnih jednadžbi razmatranog problema (28). Postupak određivanja nepoznanica q_i treba tako prilagoditi da odgovara nelinearnom problemu odnosno promjeni koeficijenata K_{ij} i slobodnih članova Q_i u tijeku iterativnog postupka (27).

Koeficijenti K_{ij} nelinearnog sustava jednadžbi $Kq = Q$ mogu se određivati u svakoj iteraciji ili nakon određenog broja iteracija.

Stanje p	Koeficijenti K_{ij} i Q_i	Iteracija po sustavu
1	$(K_{ij} ; Q_i)^{p=1}$	1 - s
2	$(K_{ij} ; Q_i)^{p=2}$	s+1 - 2*s
.	. .	.
.	. .	.
.	. .	.
p	$(K_{ij} ; Q_i)^p$	(p-1)*s+1 - p*s

Ako su određeni koeficijenti K_{ij} i Q_i uvjetnih jednadžbi sustava $Kq = Q$ (27), za usvojeni ciklični broj iteracija 's' za stanje 'p', mogu se odrediti dodatne veličine ρ_i i Δq_i (28) (29) nepoznanice q_i. Ako ovu neuravnoteženu veličinu ρ_i^m shvatimo kao dodatni utjecaj u čvoru i onda se analogno izrazu $Kq = Q$ dobiva

$$K_{ii}^m \Delta q_i^m = \rho_i^m \Rightarrow \Delta q_i^m = \rho_i^m / K_{ii}^m \, , \quad (31)$$

gdje je m iteracija po sustavu jednadžbi za stanje p. Prema izraženoj nelinearnosti problema mogu se formirati sheme za određivanje nepoznanica metodom relaksacije;

Shema 1.

Postupak A	**Postupak B**
$m = 0$; p= 0	$m = 0$; $p = 0$
$p = p+1$	$p = p+1$; $m = m+1$
For o = 1 to s	
$m = m+1$	For i = 1 to n
For i = 1 to n	$\rho_i^m \Rightarrow q_i^m = q_i^{m-1} + \Delta q_i^m$
$\rho_i^m \Rightarrow q_i^m = q_i^{m-1} + \Delta q_i^m$	next i
next i	K_{ij}^{m*} ; Q_i^{m*}
next o	*If* $\Sigma\Delta q_i^m < \varepsilon$ then
If $\Sigma\Delta q_i^{p,m} < \varepsilon$ then	*If* $\Sigma\Delta q_i^m > \varepsilon$
If $\Sigma\Delta q_i^{p,m} > \varepsilon$	
K_{ij}^p ; Q_i^p	
Rezultati	Rezultati

gdje je:

- i - tekuća nepoznata u m-toj iteraciji po sustavu
- n - broj nepoznanica
- m - tekuća iteracija;
- p - stanje sustava K^p i Q^p
- s - usvojeni broj iteracija po sustavu sa konstantnim koeficijentima K_{ij} i Q_i koji odgovara stanju p
- * - uvjeti za određivanje koeficijenata K i Q koji mogu biti npr.: 1. $\Sigma q_i < Q$; 2. $\Sigma\rho_i < R$; 3. $K_{ii}0$; i slično.

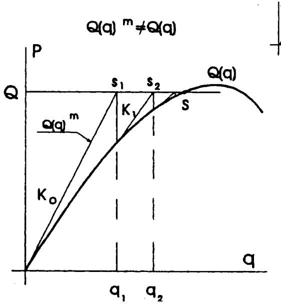
U slučaju određivanja koeficijenata K_{ij} i Q_i u svakoj iteraciji po sustavu kada je $p = m$ ili za manji broj iteracija s, potrebno je više računalnog vremena za rješavanje nelinearnog problema.

3.1 Geometrijska i materijalna nelinearnost konstrukcija

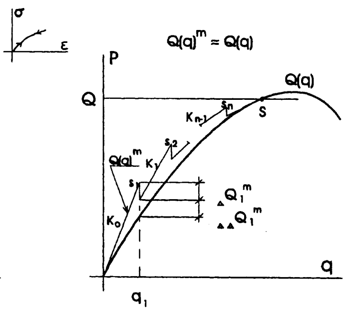
Pri rješavanju nelinearnog problema iterativnim postupkom metodom relaksacije može se birati opcija promjene položaja (geometrijska nelinearnost) i fizičkih karakteristika konačnih elemenata (koeficijenti matrice krutosti K_{ij}), stanje p.

U zoni 0-S, tj. do zone granične točke moguće je problem rješavati na dva načina u zavisnosti od σ-ε dijagrama materijala konstrukcije. Tijek iteracija, redoslijed relaksacije čvorova, ne poklapa se s tijekom promjene u realnoj konstrukciji, pa je potrebno u analizi problema voditi računa o ovoj karakteristici postupka [13].

Problem se analizira s opterećenjem Q u punom iznosu, (slika 4.). Pravci $Q(q)^m$ predstavljaju zavisnost unutrašnjih sila sustava od pomaka q, a točke s_1, s_2, .. S ravnotežu sustava za odgovarajuće vrijednosti koeficijenata matrice krutosti sustava K_1, K_2, ... , K_p.



Slika 4. Stanje *p* - ravnoteža sustava



Slika 5. Stanja p_i u tijeku iterativnog postupka

Nakon analize deformacijskih veličina i napona promjenom geometrijskih karakteristika elemenata (mijenjaju se koeficijenti K_{ij}) dolazi do pada unutrašnjih sila sustava, točka s_1. Sada se određuje nova matrica krutosti sustava K_1 čiji je nagib manji od K_0 zbog pada krutosti sustava koji je posljedica nelinearnosti. Poslije nekoliko takvih ciklusa K_{j-1}->s_j->K_j zadovoljava se kriteriji sila sustava, točka S. Iterativnim postupkom krutostima K_0, K_1, .. K_p i tačkama s_1, s_2, .. S se približavamo nelinearnoj zavisnosti $Q(q)$ konstrukcije, odnosno rješenju problema za zadano opterećenje Q.

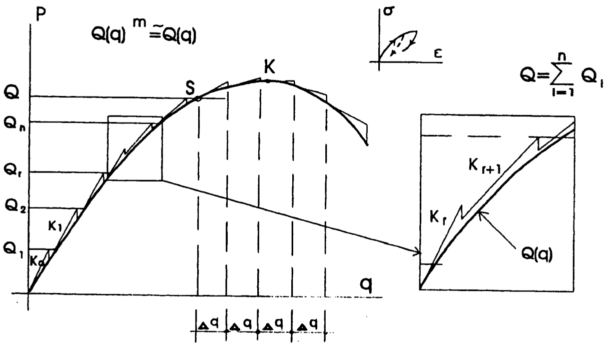
U drugom slučaju (slika 5.) usvojeno je određivanje geometrijskih karakteristika elemenata i krutosti sustava u tijeku postupka koje odgovara stanju p. Točka s_1 jest unutrašnja sila sustava $Q(q)^m$ za stanje p određeno brojem iteracija ili nekim drugim uvjetom. Nakon analize deformacijskih veličina-napona i određivanja zamjenjujućih geometrijskih karakteristika elemenata, dolazi do pada unutrašnjih sila sustava za $\Delta Q_1{}^m$. Nerazmjera $\Delta\Delta Q_1{}^m$ jest razlika unutrašnjih sila sustava po iterativnom postupku $Q(q)^m$ i konstrukcije $Q(q)$ jer redoslijed relaksacije čvorova nije dobra aproksimacija povijesti promjene opterećenja u realnoj konstrukciji. Nakon određivanja matrice krutosti K_1 koja odgovara novim geometrijskim karakteristikama elemenata sustava i novim koordinatama čvorova q_1, postupak se nastavlja do zadovoljenja kriterija, točka S (slika 5.).

U slučajevima gdje je potrebno voditi računa o povijesti deformacija i pomaka, kada zavisnost σ-ε nije jednoznačna i slično, iterativni postupak je potrebno tako prilagoditi da razlike unutrašnjih sila dobivenih numeričkom analizom i realne konstrukcije ΔQ^m + $\Delta\Delta Q^m$ budu što manje. Tok promjene po redoslijedu relaksacije čvorova analitički treba s dovoljnom točnošću aproksimirati u realnoj konstrukciji.

U okviru svakog inkrementa nelinearnost krivulje $Q(q)$ utječe na izbor rješavanja problema (slika 6.). Za inkremente opterećenja gdje je manje izrađena nelinearnost može se primijeniti postupak rješavanja smatrajući inkremente Q_1, Q_2, ... punim opterećenjem, analogno postupku na slici 4. U ovom slučaju inkrementu opterećenja odgovara promjena stanja p sustava jednadžbi, shema 1.

U slučaju više izrađene nelinearnosti razmatranog problema $Q(q)$ potrebno je iterirati za inkrement (slika 6.) analogno postupku na slici 5. U ovom slučaju za svaki inkrement usvajaju se odgovarajuće jednoznačne zavisnosti σ-ε materijala konstrukcije ili drugih veličina koje su vezane za povijest deformacija i pomaka.

Takvim postupkom sa inkrementima opterećenja $Q = \Sigma Q_i$ razlike unutrašnjih sila sustava po analitičkom iterativnom postupku i realne konstrukcije postaju male [13].



Slika 6. Iterativni postupak, zavisnost σ-ε nije jednoznačna

U zoni prije i poslije granične točke K usvaja se monotoni prirast Δq pomaka karakterističnih tačaka, a u zavisnosti od problema koji se analizira; kao stabilnost, elastoplastična stabilnost, granična nosivost [12] i drugo (slika 6.).

4 Zaključak

Iterativni postupak metodom relaksacije omogućava rješavanje linearnih i nelinearnih problema uz ograničenje da se tijek relaksacije čvorova ne poklapa sa tijekom promjena u konstrukcije.

U slučaju nelinearnog problema gdje nije potrebno voditi računa o povijesti promjene nepoznanica i drugih veličina, sustav nelinearnih jednadžbi može se rješavati promjenom koeficijenata uvjetnih jednadžbi u tijeku iterativnog postupka. Zadovoljavanje uvjeta postavljenih sustavom jednadžbi jest rješenje problema.

U drugim slučajevima, kada se vodi računa o povijesti promjene nepoznatih i drugih veličina u zoni do granične točke potrebno je slobodne članove podijeliti na inkremente. U zoni oko granične točke i dalje od nje problem se rješava usvajanjem monotonoga kontroliranog prirasta nepoznanica karakterističnih za razmatrani problem, dok se veličine drugih nepoznanica određuju prema ovako postavljenom uvjetu sustava jednadžbi.

Metoda relaksacije omogućava rješavanje geometrijske i materijalne nelinearnosti u teoriji konstrukcija. U tijeku rješavanja sustava jednadžbi iterativnim postupkom, moguće je birati opcije analize geometrijske i materijalne nelinearnosti odvojeno ili simultano. Na taj se način rješavanje problema može prilagoditi analizi konstrukcije do granične točke (točke razgranjenja), zoni oko granične točke ili za postkritično stanje.

LITERATURA

[1] Hageman, L.; Young, D.: *Applied Iterative Methods*, Academic press, New York, London, Toronto, Sydney, San Francisco, 1981.

[2] Milovanović, G.: *Numerička analiza*, Naučna knjiga, Beograd, 1985., str. 435.

[3] Demirdžić, I.: *Numerička matematika*, TP Svjetlost, d.d., I izdanje, Sarajevo. 1997., str. 250.

[4] Southwell, R. V.: *Relaxation Methods in Theoretical Phisics*, Oxford University Press (first edition), London, 1946., p. 248.

[5] Otter, J.; Cassell, A.; Hobbs, R.: *Dinamic relaxation*, The Institution of Civil Engineering Proceedings, vol.35, December 1966., pp. 633.-656.

[6] Bathe, K. J.: *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall inc. Englewood, Cliffts, New Jersey.

[7] Jose, M. M. C. Marques.: *Non-linear finite element solutions with quasi-and secant-Newton methods*, Inženjersko modeliranje br. 2/89., 1989., str. 31.-44.

[8] Argyris, J. H.; Kelsey, S.: *Energy Theorms and Structural analysis*, Aircraft engineering, vols. 26 and 27, 1955.

[9] Argyris, J. H.; Kelsey, S.: *Energy Theorems and Structural analysys*, Butterworths publishers, London, 1960.

[11] Maglajlić Z., *Rješenje nelinearnog problema okvirnih konstrukcija metodom relaksacije*, disertacija, Fakultet građevinskih znanosti Sveučilišta u Zagrebu, 1991.

[12] Maglajlić, Z.: *Relaxation method in non-linear analysis of frame structure problems*, V Simpozijum za teorijska i primeneta mehanika, Ohrid-juni 1994., p. 391.-395.

[13] Maglajlić, Z.: *Nelinearna analiza okvirnih konstrukcija metodom relaksacije*, Unisoft, Beograd, 1995., str 198.